Рабочая версия от 13 марта 2007 г.

# Материалы для проведения

# IV-го этапа XXXIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

## 2006–2007 учебный год

Москва, 2007

# Условия задач

## 8 класс

8.1. В выпуклом четырехугольнике семь из восьми отрезков, соединяющих вершины с серединами противоположных сторон, равны. Докажите, что все восемь отрезков равны.

(*Н. Агаханов*)

*Решение.*

Предположим, что восьмой отрезок не равен остальным, и это отрезок $CK$, где $ABCD$ — данный четырехугольник, а точки $K$, $L$, $M$, $N$ — середины сторон $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ соответственно (см. рис. 1). Тогда в равнобедренных треугольниках $ALD$ и $BNC$ отрезок $LN$ является медианой, а поэтому и высотой. Далее, прямоугольные треугольники $ALN$ и $BNL$ равны по гипотенузе и катету, отсюда $AN = BL$, значит, $ANLB$ — прямоугольник. Аналогично, $DNLC$ — прямоугольник, и, значит, $ABCD$ — прямоугольник. Из доказанного вытекает, что прямоугольные треугольники $DKA$ и $CKB$ равны по двум катетам, отсюда $CK = DK$ вопреки нашему предположению.

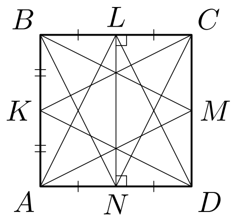

Рис. 1

**Замечание 1.** Можно завершить решение по-другому. После доказательства того, что $LN$ — серединный перпендикуляр к $AD$ и $BC$, ясно, что четырехугольник симметричен относительно $LN$; тогда все 8 рассматриваемых отрезков разбиваются на пары симметричных, и количество равных отрезков должно быть четно.

**Замечание 2.** Из условия вытекает, что данный четырехугольник — квадрат. Утверждение задачи можно усилить: равенство всех восьми отрезков следует из равенства пяти из них.

8.2. Петя задумал натуральное число и для каждой пары его цифр выписал на доску их разность. После этого он стер некоторые разности, и на доске остались числа 2, 0, 0, 7. Какое наименьшее число мог задумать Петя?

(*М. Мурашкин*)

**Ответ.** 11138.

Число 11138 могло быть задумано: $2 = 3 - 1$, $0 = 1 - 1$, $7 = 8 - 1$.

Предположим, что задумано число $N < 11138$. Поскольку выписаны разности 2 и 7, то различных цифр в числе $N$ не менее трех. Так как выписаны два нуля, то среди цифр найдутся либо три одинаковых, либо две пары равных. Так как $N < 11138$, то в числе $N$ ровно пять цифр, среди которых ровно три различные цифры, и первая цифра равна 1. Если в записи $N$ встречаются 0, 1 и $a > 1$, то среди разностей цифр встречаются лишь числа 0, 1, $a$, $a - 1$, что невозможно. Иначе в записи $N$ нет нулей, и $N = \overline{111bc}$, где $b = 2$ или $b = 3$ (т. к. $N < 11138$). Тогда $c \geqslant 1 + 7 = 8$, откуда $b \neq 3$. Но если $b = 2$, то среди разностей цифр встречаются лишь числа 0, 1, $c - 1$, $c - 2$. Противоречие.

8.3. Существуют ли такие простые числа $p_1$, $p_2$, ..., $p_{2007}$, что $p_1^2 - 1$ делится на $p_2$, $p_2^2 - 1$ делится на $p_3$, ..., $p_{2007}^2 - 1$ делится на $p_1$?

(*В. Сендеров*)

**Ответ.** Не существуют.

Предположим, что такие числа существуют.

Пусть одно из чисел равно 2, скажем, $p_1 = 2$. Тогда последовательно получаем, что $p_2 = 3$, $p_3 = 2$, $p_4 = 3$, $p_5 = 2$, ..., $p_{2007} = 2$, $p_1 = 3$ — противоречие.

Пусть все числа — нечетные простые, и $p_1$ — наибольшее из них. Пусть $p_{2007} = q \leqslant p_1$. Тогда $q^2 - 1 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{q-1}{2} \cdot \frac{q+1}{2}$, где все сомножители целые и не превосходят $\frac{q+1}{2} < q \leqslant p_1$. Получаем противоречие с тем, что $q^2 - 1$ делится на $p_1$.

8.4. На шахматной доске расставлены во всех клетках 32 белых и 32 черных пешки. Пешка может бить пешки противоположного цвета, делая ход по диагонали на одну клетку и становясь на место взятой пешки (белые пешки могут бить только вправо-вверх и влево-вверх, а черные — только влево-вниз и вправо-вниз). Другим образом пешки ходить не могут. Какое наименьшее количество пешек может остаться на доске?

(*И. Богданов*)

**Ответ.** Две.

Заметим, что пешка, стоявшая на черной клетке, все время будет перемещаться только по черным клеткам. Тогда после каждого хода (по черным клеткам) на черных клетках всегда будет оставаться хотя бы одна пешка — та, которая делала ход. Аналогично, хотя бы одна пешка будет оставаться на белых клетках, и всего останется не меньше двух пешек.

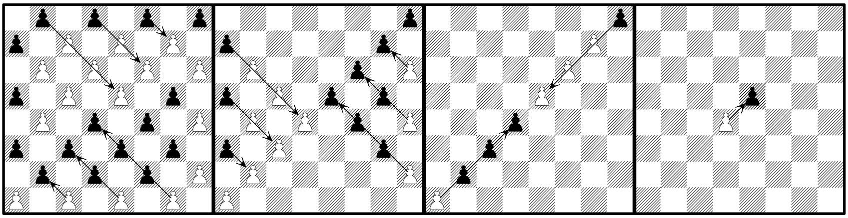

Рис. 2

На рис. 2 показано, как расставить пешки на черных клетках и как ходить ими так, чтобы осталась только одна. Расстановка и действия на белых клетках аналогичны.

8.5. Среди 11 внешне одинаковых монет 10 настоящих, весящих по 20 г, и одна фальшивая, весящая 21 г. Имеются чашечные весы, которые оказываются в равновесии, если груз на правой их чашке ровно вдвое тяжелее, чем на левой. (Если груз на правой чашке меньше, чем удвоенный груз на левой, то перевешивает левая чашка, если больше, то правая.) Как за три взвешивания на этих весах найти фальшивую монету?

(*И. Рубанов*)

*Решение.* Приведем один из возможных алгоритмов.

Сначала покажем, как за два взвешивания найти фальшивую монету среди пяти, четыре из которых настоящие. Положим на левую чашку одну монету, а на правую — две. Если перевесила левая чашка, то фальшивая монета на ней. Если перевесила правая чашка, то фальшивая монета — одна из двух на правой чашке; если весы в равновесии, фальшивая монета — одна из двух оставшихся. В любом случае у нас две “подозреваемых” монеты, и известны три настоящих. Положим на левую чашу одну из “подозреваемых”, а на правую — две настоящих. Если левая чашка перевесила, то фальшивая монета на ней; если весы в равновесии, то фальшивая — оставшаяся из двух “подозреваемых”.

Пусть теперь у нас 11 монет. Положим на правую чашку весов любые 4 из них, а на левую — любые две. Если весы в равновесии, фальшивая монета — среди пяти не лежащих на весах, и мы находим ее за оставшиеся два взвешивания. Если перевесила одна из чашек — фальшивая монета на ней, и мы сузили круг “подозреваемых” монет до двух или четырех. Добавляя к ним соответственно три или одну монету с другой чашки, снова сводим задачу к поиску одной фальшивой монеты среди пяти за два взвешивания.

**Замечание.** На самом деле, за три взвешивания на таких весах можно выявить фальшивую монету даже из 21.

8.6. В натуральном числе $A$ переставили цифры, получив число $B$. Известно, что $A - B = \underbrace{11\ldots1}_{N\text{ единиц}}$. Найдите наименьшее возможное значение $N$. (*Н. Агаханов*)

**Ответ.** 9.

Как известно, любое число имеет тот же остаток от деления на 9, что и его сумма цифр. Поэтому числа, получаемые друг из друга перестановкой цифр, имеют одинаковый остаток от деления на 9, т. е. их разность делится на 9. Поэтому и сумма цифр разности, равная $N$, должна делиться на 9, откуда $N \geqslant 9$.

Значение $N = 9$ получается, например, так:

$$9012345678 - 8901234567 = 111111111.$$

8.7. Внутри равнобедренного треугольника $ABC$ ($AB = BC$) выбрана точка $M$ таким образом, что $\angle AMC = 2\angle ABC$. На отрезке $AM$ нашлась такая точка $K$, что $\angle BKM = \angle ABC$. Докажите, что $BK = KM + MC$. (*С. Берлов*)

*Решение.*

Продлим отрезок $CM$ до пересечения с $BK$ в точке $L$. Поскольку в треугольнике внешний угол равен сумме двух несмежных с ним внутренних, $\angle KLM = \angle AMC - \angle BKM = 2\angle ABC - \angle ABC = \angle ABC$, откуда $MK = ML$. Далее, $AB = BC$, $\angle LCB = \angle KLM - \angle LBC = \angle ABC - \angle KBC = \angle ABK$, $\angle BAK = \angle BKM - \angle ABK = \angle KLM - \angle BCL = \angle LBC$; поэтому треугольники $ABK$ и $BCL$ равны. Значит, $BK = CL = CM + ML = CM + MK$, что и требовалось.

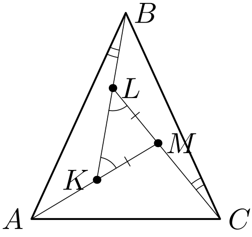

Рис. 3

8.8. В классе учится 15 мальчиков и 15 девочек. В день 8 марта некоторые мальчики позвонили некоторым девочкам и поздравили их с праздником (никакой мальчик не звонил одной и той же девочке дважды). Оказалось, что детей можно единственным образом разбить на 15 пар так, чтобы в каждой паре оказался мальчик с девочкой, которой он звонил. Какое наибольшее число звонков могло быть сделано?

(*С. Берлов*)

**Ответ.** 120.

Обозначим мальчиков $M_1, M_2, \ldots, M_{15}$, а девочек — $D_1, D_2, \ldots, D_{15}$ так, чтобы $M_1$ — $D_1$, $M_2$ — $D_2$, …, $M_{15}$ — $D_{15}$ было единственным разбиением на пары из условия задачи.

Предположим, что каждый мальчик позвонил хотя бы двум девочкам. Нарисуем стрелку от каждой девочки $D_i$ — к мальчику $M_i$, с которым она находится в паре, а от каждого мальчика $M_i$ — к другой (отличной от $D_i$) девочке, которой он звонил. Тогда от каждого ребенка ведет по стрелке. Если мы будем двигаться по стрелкам (начав от произвольной девочки), то рано или поздно мы попадем к девочке, у которой мы уже были; таким образом, найдется цикл $D_{i_1} \to M_{i_1} \to D_{i_2} \to M_{i_2} \to \ldots \to D_{i_k} \to M_{i_k} \to D_{i_1}$ (здесь $k > 1$, т. к. от $M_{i_1}$ ведет стрелка не к $D_{i_1}$). Объединим в этом цикле каждого мальчика $M_{i_d}$ с девочкой $D_{i_{d+1}}$, к которой от него ведет стрелка ($M_{i_k}$ мы объединим с $D_{i_1}$); остальные пары оставим без изменения. Мы получили другое разбиение на пары, что противоречит условию.

Следовательно, найдется мальчик $M_i$, который звонил ровно одной девочке $D_i$. Тогда, если отбросить эту пару, число звонков уменьшится не больше, чем на 15. После этого снова найдется мальчик, сделавший ровно один звонок одной из оставшихся девочек. Отбросив эту пару, уменьшим количество звонков не более, чем на 14, и т. д. Итого, было сделано не более $15 + 14 + \ldots + 2 + 1 = 120$ звонков.

Ровно 120 звонков получается например, если девочке $D_i$ звонили мальчики $M_1$, $M_2$, …, $M_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 15)$.

# 9 класс

9.1. Петя придумал 1004 приведенных квадратных трехчлена $f_1, \ldots, f_{1004}$, среди корней которых встречаются все целые числа от 0 до 2007. Вася рассматривает всевозможные уравнения $f_i = f_j$ $(i \neq j)$, и за каждый найденный у них корень Петя платит Васе по рублю. Каков наименьший возможный доход Васи? (*И. Рубанов*)

**Ответ.** 0.

Положим $f_1(x) = x(x - 2007)$, $f_2(x) = (x - 1)(x - 2006)$, …, $f_{1004}(x) = (x - 1003)(x - 1004)$. Все эти многочлены попарно различны, потому что у них разные корни, но коэффициент при $x$ у каждого из них равен $-2007$. Поэтому разность любых двух данных трехчленов равна константе, отличной от 0, поэтому ни одно из уравнений $f_n(x) = f_m(x)$ не имеет решений.

9.2. Существуют ли такие простые числа $p_1$, $p_2$, …, $p_{2007}$, что $p_1^2 - 1$ делится на $p_2$, $p_2^2 - 1$ делится на $p_3$, …, $p_{2007}^2 - 1$ делится на $p_1$? (*В. Сендеров*)

**Ответ.** Не существуют.

См. решение задачи 8.3.

9.3. 25 мальчиков и несколько девочек собрались на вечеринке и обнаружили забавную закономерность. Если выбрать любую группу не меньше чем из 10 мальчиков, а потом добавить к ним всех девочек, знакомых хотя бы с одним из этих мальчиков, то в получившейся группе число мальчиков окажется на 1 меньше, чем число девочек. Докажите, что некоторая девочка знакома не менее чем с 16 мальчиками.

(*С. Волченков, жюри*)

*Решение.* По условию имеется ровно 26 девочек, знакомых хотя бы с одним мальчиком из 25. Выберем произвольно мальчика $M$. Для оставшихся 24 мальчиков ровно 25 девочек знакомы хотя бы с одним из них. Тогда девочка $D$, не входящая в эти 25, знакома только с одним мальчиком $M$. Обозначим мальчиков $M_1, \ldots, M_{25}$; обозначим девочку, знакомую только с $M_i$, через $D_i$. Рассмотрим оставшуюся девочку (отличную от $D_1, \ldots, D_{25}$). Если она знакома менее, чем с 16 мальчиками, то для группы из $k \geqslant 10$ мальчиков, не знакомых с ней, найдется ровно $k$ девочек, знакомых хотя бы с одним из них — противоречие.

9.4. У двух треугольников равны наибольшие стороны и равны наименьшие углы. Строится новый треугольник со сторонами, равными суммам соответствующих сторон данных треугольников (складываются наибольшие стороны двух треугольников, средние по длине стороны и наименьшие стороны). Докажите, что площадь нового треугольника не меньше удвоенной суммы площадей исходных. (*Н. Агаханов*)

*Решение.*

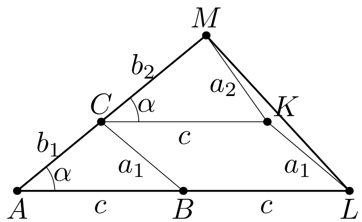


Рис. 4

Пусть $a_1 \leqslant b_1 \leqslant c$, $a_2 \leqslant \leqslant b_2 \leqslant c$ — длины сторон данных треугольников, $\alpha$ — их общий наименьший угол, $\alpha_1$ — наименьший угол в построенном треугольнике со сторонами $a_1+a_2$, $b_1+b_2$, $c+c$. В этом треугольнике $a_1 + a_2$ — наименьшая сторона, поэтому угол $\alpha_1$ лежит против нее и является острым. Рассмотрим треугольник $AML$ с углом $\alpha$ при вершине $A$ и боковыми сторонами $AM = b_1 + b_2$, $AL = c + c$ (см. рис. 4). Покажем, что $\alpha_1 \geqslant \alpha$; для этого достаточно доказать, что $ML \leqslant a_1 + a_2$. Пусть $B$ и $C$ — точки на сторонах $AL$ и $AM$ соответственно такие, что $AC = b_1$, $AB = c$. Выберем точку $K$ так, что $BCKL$ — параллелограмм. Тогда треугольники $ABC$ и $CKM$ соответственно равны исходным треугольикам, поэтому из треугольника $MKL$ получаем $MK = a_2$, $KL = a_1$, откуда по неравенству треугольника $ML \leqslant a_1 + a_2$, что и требовалось. Отсюда $S = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)(c + c)\sin\alpha_1 \geqslant (b_1 + b_2)c\sin\alpha \geqslant 2\left(\frac{1}{2}b_1 c\sin\alpha + \frac{1}{2}b_2 c\sin\alpha\right) = 2(S_1 + S_2)$, что и требовалось доказать.

9.5. Среди 11 внешне одинаковых монет 10 настоящих, весящих по 20 г, и одна фальшивая, весящая 21 г. Имеются чашечные весы, которые оказываются в равновесии, если груз на правой их чашке ровно вдвое тяжелее, чем на левой. (Если груз на правой чашке меньше, чем удвоенный груз на левой, то перевешивает левая чашка, если больше, то правая.) Как за три взвешивания на этих весах найти фальшивую монету?

(*И. Рубанов*)

*Решение.* См. решение задачи 8.5.

9.6. На стороне $BC$ треугольника $ABC$ выбрана произвольная точка $D$. В треугольники $ABD$ и $ACD$ вписаны окружности с центрами $K$ и $L$ соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников $BKD$ и $CLD$ вторично пересекаются на фиксированной окружности.

(*Л. Емельянов*)

*Решение.*

Пусть описанные окружности треугольников $BKD$ и $CLD$ вторично пересекаются в точке $M$ (см. рис. 5). Пользуясь тем, что четырехугольники $BKDM$ и $CLDM$ вписанные, получаем: $\angle BMC = \angle BMD + \angle CMD = (180^\circ - \angle BKD) + (180^\circ - \angle CLD) = \angle KBD + \angle KDB + \angle LDC + \angle LCD = \frac{1}{2}(\angle ABD + \angle ADB + \angle ADC + \angle ACD) = \frac{1}{2}(\angle ABD + 180^\circ +$

$+\angle ACD) = 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle ABD + \angle ACD)$. Величина угла $BMC$ фиксирована, поэтому $M$ лежит на фиксированной окружности с хордой $BC$.

**Замечание.** В решении используется, что точки $A$ и $M$ лежат по разные стороны от $BC$. Это нетрудно вывести из того, что углы $BKD$ и $CLD$ тупые.

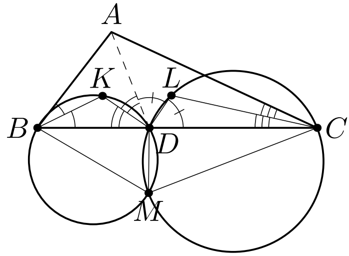


Рис. 5

9.7. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит точный куб натурального числа. Докажите, что она содержит и точный куб, не являющийся точным квадратом.

(*И. Богданов, В. Сендеров*)

*Решение.* **Лемма.** *Если для некоторого натурального $n$ число $n^3$ является точным квадратом, то число $n$ также является точным квадратом.*

**Доказательство.** Пусть простое число $p$ входит в разложение числа $n$ на простые множители в степени $t$, тогда $p$ входит в разложение числа $n^3$ в степени $3t$. По условию $3t$ четно, поэтому $t$ четно. В силу произвольности $p$ получаем, что $n$ — точный квадрат. Лемма доказана.

Пусть в прогрессии с разностью $d > 0$ содержится куб натурального числа $m$. Если $m^3$ не является точным квадратом, то искомое число найдено. Иначе $m^3$ — точный квадрат и, согласно лемме, $m$ — точный квадрат, $m = k^2$. Вместе с $m^3$ прогрессия содержит точный куб $A = (m + md^2)^3$, поскольку $A = m^3 + ld$, где $l$ — натуральное. Докажем, что $A$ не является точным квадратом. Пусть это не так, тогда по лемме $m + md^2 = k^2(1 + d^2)$ — точный квадрат. Отсюда $1 + d^2$ — точный квадрат, $1 + d^2 = x^2$ для натурального $x$. Получаем $1 = (x - d)(x + d)$, что невозможно.

9.8. Среди натуральных чисел от 1 до 1200 выбрали 372 различных числа так, что никакие два из них не различаются на

4, 5 или 9. Докажите, что число 600 является одним из выбранных. (*Д. Храмцов*)

*Решение.* **Лемма.** *Среди любых 13 подряд идущих натуральных чисел можно выбрать не более четырех так, что никакие два из них не различаются на 4, 5 или 9.*

**Доказательство.** Разобьем 13 чисел $a$, $a+1$, ..., $a+12$ на 9 групп (из одного или двух чисел) и запишем группы по кругу в следующем порядке: $\{a+4\}, \{a, a+9\}, \{a+5\}, \{a+1, a+10\}, \{a+6\}, \{a+2, a+11\}, \{a+7\}, \{a+3, a+12\}, \{a+8\}$. Если выбрано 5 или более чисел, то некоторые два из них окажутся в одной группе или в соседних группах. Однако из двух соседних групп можно выбрать не более одного числа. Лемма доказана.

Отметим 4 средних числа 599, 600, 601, 602, а все остальные числа от 1 до 1200 разобьем на $(1200-4)/13 = 92$ группы по 13 последовательных чисел (это возможно, так как 598 делится на 13). Из леммы следует, что в группах по 13 чисел можно выбрать не более $92 \cdot 4 = 372 - 4$ числа требуемым в условии образом. Значит, отмеченные 4 числа выбраны.

# 10 класс

10.1. В 25 коробках лежат шарики нескольких цветов. Известно, что при любом $k$ $(1 \leqslant k \leqslant 25)$ в любых $k$ коробках лежат шарики ровно $k+1$ различных цветов. Докажите, что шарики одного из цветов лежат во всех коробках. (*С. Волченков*)

*Решение.* Обозначим коробки $B_1$, ..., $B_{25}$. По условию общее число цветов равно 26. Если рассмотреть все коробки, кроме $B_i$, то общее число цветов в них равно 25. Следовательно, есть цвет, присутствующий только в коробке $B_i$; назовем его $C_i$.

Поскольку общее число цветов — 26, остался ровно один цвет $C$, отличный от всех $C_i$. Если в какой-то коробке $B_k$ нет шариков этого цвета, то в ней есть только шарики цвета $B_k$, что противоречит условию (в $B_k$ должны быть шарики двух цветов). Значит, шарики цвета $C$ есть во всех коробках.

10.2. Для вещественных $x > y > 0$ и натуральных $n > k$ докажите неравенство $(x^k - y^k)^n < (x^n - y^n)^k$. (*В. Сендеров*)

*Решение.* Разделив на $x^{nk}$ и обозначив $\alpha = y/x$, перепишем наше неравенство в виде

$$(1-\alpha^k)^n < (1-\alpha^n)^k.$$

Однако $0 < 1-\alpha^k < 1-\alpha^n < 1$ (т. к. $0 < \alpha < 1$), поэтому

$$(1-\alpha^k)^n < (1-\alpha^n)^n < (1-\alpha^n)^k,$$

что и требовалось.

10.3. При каком наименьшем $n$ для любого набора $\mathbf{A}$ из 2007 множеств найдется такой набор $\mathbf{B}$ из $n$ множеств, что каждое множество набора $\mathbf{A}$ является пересечением двух различных множеств набора $\mathbf{B}$? (*И. Богданов, Г. Челноков*)

**Ответ.** $n = 2008$.

Пусть набор $\mathbf{A}$ содержит множества $A_1, A_2, \ldots, A_{2007}$. Включим в набор $\mathbf{B}$ множества $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$, $\ldots$, $B_{2007} = A_{2007}$, $B_{2008} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{2007} \cup \{x\}$ (здесь $x$ — элемент, не принадлежащий ни одному из множеств $A_i$). Тогда все множества $B_i$ разные, и $A_i = B_{2008} \cap B_i$ для $i = 1, 2, \ldots, 2007$.

Далее, докажем, для множеств $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1, 2\}$, $A_3 = \{1, 2, 3\}$, $\ldots$, $A_{2007} = \{1, 2, \ldots, 2007\}$ в любом наборе $\mathbf{B}$, удовлетворяющем условию, не менее 2008 множеств. Из условия вытекает, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, 2006$ среди множеств набора $\mathbf{B}$ найдется множество $B_i$, содержащее $A_i$, но не содержащее $A_{i+1}$ (иначе $A_i$ не может быть пересечением множеств набора $\mathbf{B}$); заметим, что $B_i$ также содержит все множества $A_1, \ldots, A_i$ и не содержит ни одного из множеств $A_{i+1}, \ldots, A_n$; поэтому все множества $B_i$ разные. Кроме того, среди множеств набора $\mathbf{B}$ найдутся два множества $B_{2007}$ и $B_{2008}$, содержащие $A_{2007}$. Очевидно, множества $B_1, B_2, \ldots, B_{2008}$ различны.

**Замечание.** Другим примером множеств, для которых $n \geqslant 2008$, являются множества $A_i = A \setminus \{i\}$, где $A = \{1, 2, \ldots, 2007\}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2007)$.

10.4. Окружность проходит через вершины $B$ и $C$ треугольника $ABC$ и пересекает стороны $AB$ и $AC$ в точках $D$ и $E$ соответственно. Отрезки $CD$ и $BE$ пересекаются в точке $O$. Пусть $M$ и $N$ — центры окружностей, вписанных соответственно в треугольники $ADE$ и $ODE$. Докажите, что середина меньшей дуги $DE$ лежат на прямой $MN$. (*М. Исаев*)

*Решение.* Середину меньшей дуги $DE$ обозначим через

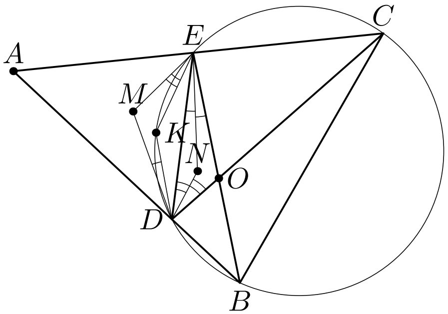


Рис. 6

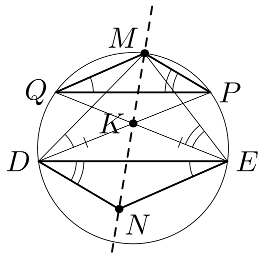


Рис. 7

$K$ (см. рис. 6). Тогда $\angle MEK = \angle MED - \angle KED = \angle MED - \angle KCD = \frac{1}{2}\angle AED - \frac{1}{2}\angle ECD = \frac{1}{2}(\angle AED - \angle ECD) = \frac{1}{2}\angle CDE = \angle EDN$ (в частности, точка $K$ лежит в $\angle MED$, т.к. $\angle EDN < \angle AED$). Аналогично $\angle MDK = \angle DEN$.

Пусть прямые $DK$ и $EK$ пересекают описанную окружность треугольника $DEM$ соответственно в точках $P$ и $Q$ (см. рис. 7). Так как $DK = EK$, то $\angle KED = \angle KDE = \angle PDE = \angle PQE$, откуда $PQ \parallel DE$. Далее, $\angle QPM = \angle QEM = \angle KEM = \angle EDN$ и, аналогично, $\angle PQM = \angle DEN$. Отсюда вытекает, что треугольники $DEN$ и $PQM$ гомотетичны, причем $K$ является центром гомотетии (как точка пересечения прямых $QE$ и $PD$). Следовательно, $MN$ проходит через $K$.

10.5. В натуральном числе $A$ переставили цифры, получив число

$B$. Известно, что $A - B = \underbrace{11\ldots1}_{N \text{ единиц}}$. Найдите наименьшее возможное значение $N$. (*Н. Агаханов*)

**Ответ.** 9.

См. решение задачи 8.6.

10.6. Точка $D$ на стороне $BC$ треугольника $ABC$ такова, что радиусы вписанных окружностей треугольников $ABD$ и $ACD$ равны. Докажите, что радиусы окружностей, вневписанных в треугольники $ABD$ и $ACD$, касающихся соответственно отрезков $BD$ и $CD$, также равны. (*Л. Емельянов*)

*Решение.* **Первое решение.** Рассмотрим общую внешнюю касательную $l$ (отличную от $BC$) для окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$, вписанных в треугольники $ABD$ и $ACD$ (см. рис. 9). Из равенства окружностей $l \parallel BC$. Рассмотрим гомотетию с центром $A$, переводящую прямую $l$ в прямую $BC$. При выполнении этой гомотетии окружность $\omega_1$ перейдет в окружность, отличную от $\omega_1$, вписанную в угол $BAD$ и касающуюся прямой $BC$, т. е. в соответствующую вневписанную окружность треугольника $ABD$. Аналогично, $\omega_2$ перейдет во вневписанную окружность треугольника $ACD$. Отсюда вытекает утверждение задачи, так как при гомотетии равные окружности переходят в равные.

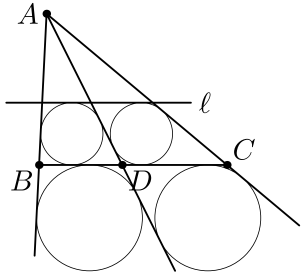

Рис. 9

**Второе решение.** Пусть высота треугольника $ABC$, опущенная из вершины $A$, равна $h$, площади треугольников $ABD$ и $ACD$ равны $S_1$, $S_2$, радиусы их вписанных окружностей равны $r$, радиусы вневписанных окружностей (о которых идет речь в задаче) — $r_1$ и $r_2$, соответственно. Положив $AB = c$, $AD = d$, $BD = x$, находим $2S_1 = r_1(c + d - x)$ $\Rightarrow \frac{1}{r_1} = \frac{c+d-x}{2S_1} = \frac{c+d+x}{2S_1} - 2\,\frac{x}{2S_1} = \frac{1}{r} - \frac{2}{h}$. Аналогично можно получить, что $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} - \frac{2}{h}$, откуда $r_1 = r_2$.

10.7. Дано натуральное число $n > 6$. Рассматриваются натуральные числа, лежащие в промежутке $(n(n-1); n^2)$ и взаимно простые с $n(n-1)$. Докажите, что наибольший общий делитель всех таких чисел равен 1. (*В. Астахов*)

*Решение.* Пусть $p$ — минимальное число, большее 1 и взаимно простое с $n(n-1)$. Ясно, что любой его простой делитель также удовлетворяет этому условию, поэтому $p$ — простое. Кроме того, все простые числа, меньшие $p$, делят $n(n-1)$.

**Лемма.** $p < n-1$.

**Доказательство.** Рассмотрим числа $n-2$, $n-3$, $n-4$. Среди них не больше одного числа, делящегося на 3, и не больше одного числа, являющегося степенью двойки (т. к. $n-4>2$). Таким образом, у одного из них есть нечетный простой делитель $q$, больший 3. Числа $n$ и $n-1$ не могут делиться на $q$, поэтому $p \leqslant q \leqslant n-2$. Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи. Ясно, что среди рассматриваемых чисел есть число $A = n(n-1)+1$. Из леммы следует, что среди них также есть число $B = n(n-1)+p$. Тогда НОД$(A, B) =$ НОД$(n(n-1)+1, p-1) = 1$, т. к. любой простой делитель числа $p-1$ делит $n(n-1)$ и потому взаимно прост с $A$. Итак, НОД уже этих двух чисел равен 1, что и требовалось.

10.8. Таблица $15 \times 15$ изначально пуста. За один ход разрешается выбрать любой ее столбец или строку и записать туда все числа от 1 до 15 в произвольном порядке (по одному в каждую клетку, старые числа стираются). Какую максимальную сумму чисел в таблице можно получить путем нескольких таких ходов? (*М.Мурашкин*)

**Ответ.** $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \ldots + 15 \cdot 29 = 2360$.

Будем называть столбцы и строки *линиями*.

Пусть есть некоторый способ расставить числа так, чтобы получить максимальную возможную сумму. Заметим, что два раза записывать числа в одну и ту же линию не имеет смысла — если первого раза не делать, итоговые числа в таблице не изменятся. Далее, если в какую-то линию не было хода, то можно было сделать произвольный ход в нее перед всеми остальными ходами — сумма чисел от этого не уменьшится. Поэтому можно считать, что в каждую линию был сделан ровно один ход.

Переставим строки таблицы так, чтобы первый "горизонтальный" ход был в первую (верхнюю) строку, второй — во вторую и т. д.; сделаем то же самое со столбцами. Рассмотрим ход в некоторый столбец. После этого хода числа в нем менялись только тогда, когда делались ходы в строки; следовательно, остались незамененными ровно несколько самых верхних чисел. Ясно, что для достижения максимальной суммы эти несколько чисел должны быть максимальными. Тогда при ходе в этот столбец можно просто расставлять в нем числа по возрастанию снизу вверх — при любом количестве последующих горизонтальных ходов в нем останется несколько максимальных чисел.

Аналогично, на каждом ходе в строку числа можно расставлять по возрастанию справа налево. Таким образом, в каждую клетку будут поставлены два числа — его номер справа в строке и его номер снизу в столбце. Тогда в этой клетке будет стоять не больше, чем максимальное из этих чисел.

Осталось привести пример, когда в каждой клетке ровно это число и будет стоять. Для этого достаточно ходить так: в 1-ю строку, в 1-й столбец, во 2-ю строку, во 2-й столбец и т. д. Тогда в каждую клетку бóльшее число будет поставлено позже, чем меньшее, что и требовалось. При этом в таблице окажется одна единица, три двойки, пять троек и т. д.

# 11 класс

11.1. В 25 коробках лежат шарики нескольких цветов. Известно, что при любом $k$ ($1 \leqslant k \leqslant 25$) в любых $k$ коробках лежат шарики ровно $k+1$ различных цветов. Докажите, что шарики одного из цветов лежат во всех коробках. (*С. Волченков*)

*Решение.* См. решение задачи 10.1.

11.2. Квадратные трехчлены $f_1(x)$ и $f_2(x)$ таковы, что

$$f_1'(x)f_2'(x) \geqslant |f_1(x)| + |f_2(x)|$$

при всех действительных $x$. Докажите, что произведение $f_1(x)f_2(x)$ равно квадрату некоторого трехчлена.

(*Н. Агаханов, жюри*)

*Решение.* Если $x_1$, $x_2$ — абсциссы вершин парабол $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, то $f_1(x) = a_1(x-x_1)^2 + d_1$, $f_2(x) = a_2(x-x_2)^2 + d_2$ $(a_1, a_2 \neq 0)$. Тогда $f_1'(x)f_2'(x) = 4a_1a_2(x-x_1)(x-x_2)$. Пусть $x_1 \neq x_2$ (для определенности, $x_1 < x_2$). Тогда, если $a_1a_2 > 0$, то $f_1'(x)f_2'(x) < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$, а если $a_1a_2 < 0$, то $f_1'(x)f_2'(x) < 0$ при $x \notin [x_1; x_2]$. В то же время, $|f_1(x)| + |f_2(x)| \geqslant 0$ — противоречие с условием. Значит, $x_1 = x_2 = x_0$. Тогда $f_1'(x_0)f_2'(x_0) = 0$, а $|f_1(x_0)| + |f_2(x_0)| = |d_1| + |d_2|$. Значит, $d_1 = d_2 = 0$, т. е. $f_1(x) = a_1(x-x_0)^2$, $f_2(x) = a_2(x-x_0)^2$ и $f_1(x)f_2(x) = a_1a_2(x^2 - 2x_0x + x_0^2)^2$. Таким образом, утверждение задачи будет верно, если $a_1a_2 > 0$. Но это выполнено, так как $f_1'(x)f_2'(x) = 4a_1a_2(x-x_0)^2 \geqslant |f_1(x)| + |f_2(x)| \geqslant 0$ только при $a_1a_2 > 0$.

11.3. В треугольнике $ABC$ на стороне $BC$ выбрана точка $M$ так, что точка пересечения медиан треугольника $ABM$ лежит на описанной окружности треугольника $ACM$, а точка пересечения медиан треугольника $ACM$ лежит на описанной окружности треугольника $ABM$. Докажите, что медианы треугольников $ABM$ и $ACM$ из вершины $M$ равны.

(*А. Бадзян*)

*Решение.*

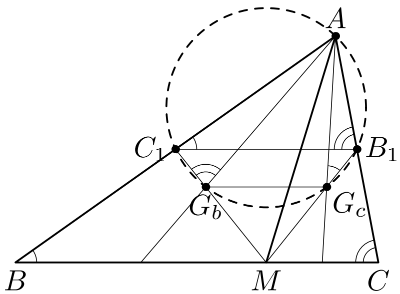


Рис. 10

Обозначим середины сторон $AB$ и $AC$ через $C_1$ и $B_1$

соответственно, а точки пересечения медиан треугольников $ABM$, $ACM$ — через $G_b$, $G_c$ соответственно (см. рис. 10). Тогда $\angle AG_cB_1 = 180^\circ - \angle AG_cM = \angle ABM$, так как $AG_cMB$ — вписанный четырехугольник; далее, $\angle ABM = AC_1B_1$, так как $C_1B_1 \parallel BC$. Значит, $\angle AG_cB_1 = \angle AC_1B_1$. Следовательно, четырехугольник $AC_1G_cB_1$ вписан, то есть точка $G_c$ лежит на описанной окружности $\triangle AB_1C_1$. Аналогично, $G_b$ лежит на описанной окружности $\triangle AB_1C_1$. Таким образом, точки $A$, $C_1$, $G_b$, $G_c$, $B_1$ лежат на одной окружности. Далее, $G_cG_b \parallel B_1C_1$, т. к. $\frac{MG_b}{G_bC_1} = 2 = \frac{MG_c}{G_cB_1}$. Получаем, что $C_1B_1G_cG_b$ — вписанная трапеция, значит, $\angle G_bC_1B_1 = \angle G_cB_1C_1$, т. е. $MB_1 = MC_1$, что и требовалось доказать.

11.4. На столе лежат купюры достоинством 1, 2, …, $2n$ тугриков. Двое ходят по очереди. Каждым ходом игрок снимает со стола две купюры, бо́льшую отдает сопернику, а меньшую забирает себе. Каждый стремится получить как можно больше денег. Сколько тугриков получит начинающий при правильной игре? (*Г. Челноков, И. Богданов*)

**Ответ.** $n^2 = 1+3+\ldots+(2n-1)$ при нечетном $n$, $n(n+1) = 2+4+\ldots+2n$ при четном $n$.

Обобщим задачу. Пусть в начале игры на столе лежат купюры достоинством $M_1 > M_2 > \ldots > M_{2n}$. Покажем индукцией по $n$, что игрок, делающий последний ход (назовем этого игрока *последним*), всегда может получить не менее $M_2 + M_4 + \ldots + M_{2n}$ тугриков, а игрок, делающий предпоследний ход (назовем этого игрока *предпоследним*) — не менее $M_1 + M_3 + \ldots + M_{2n-1}$ тугриков. Сразу заметим, что сумма этих чисел равна суммарному достоинству всех купюр; поэтому при оптимальной игре они получат ровно такое количество. База при $n = 1$ очевидна. Пусть утверждение верно для $n = k-1$, докажем его для $n = k$.

Пусть $k$ нечетно, тогда ходить должен последний игрок. Он может снять купюры $M_1$ и $M_2$; тогда в оставшейся игре он получит не меньше $M_4 + M_6 + \ldots + M_{2k}$, а за этот ход он получит $M_2$; поэтому у него окажется не меньше $M_2 + (M_4 + \ldots + M_{2k})$ тугриков, что и требовалось.

Покажем, что при любом ходе последнего предпоследний получит не меньше $M_1 + M_3 + \ldots + M_{2k-1}$ тугриков. Пусть последний взял купюры $M_i > M_j$; перенумеруем оставшиеся на столе купюры по убыванию: $L_1 > L_2 > \ldots > L_{2k-2}$. Тогда по предположению индукции предпоследний сможет дальше играть так, чтобы получить не меньше, чем $L_1 + L_3 + \ldots + L_{2k-3}$. Поэтому нам достаточно показать, что

$$M_i + (L_1 + L_3 + \ldots + L_{2k-3}) \geqslant M_1 + M_3 + \ldots + M_{2k-1}. \qquad (1)$$

Пусть $1 \leqslant d \leqslant k$. Покажем, что в левой части неравенства присутствует не меньше $d$ купюр из $2d-1$ наибольших купюр $M_1, M_2, \ldots, M_{2d-1}$; это будет означать, что $d$-е по величине слагаемое слева не меньше $M_{2d-1}$, откуда и следует (1).

Действительно, если $i > 2d-1$, то $M_{2d-1} = L_{2d-1}$ и в левой части содержится $d$ купюр $M_1, M_3, \ldots, M_{2d-1}$. Пусть $i \geqslant 2d-1$. Тогда среди $M_1, M_2, \ldots, M_{2d-1}$ содержатся купюры $L_1, L_2, \ldots, L_{2d-3}$, из которых $d-1$ содержится в левой части; кроме того, в ней содержится $M_i$, что и требовалось.

Аналогично, если $k$ четно, то ходит предпоследний. Если он снимет купюры $M_2$ и $M_3$, то он получит не меньше $M_3 + (M_1 + M_5 + M_7 + \ldots + M_{2k-1})$, что и требовалось. Далее, пусть предпоследний снял купюры $M_i > M_j$, оставив на столе купюры $L_1 > L_2 > \ldots > L_{2k-2}$; тогда по предположению индукции последний сможет за дальнейшую игру получить не меньше, чем $L_2 + L_4 + \ldots + L_{2k-2}$. Поэтому достаточно показать, что

$$M_i + (L_2 + L_4 + \ldots + L_{2k-2}) \geqslant M_2 + M_4 + \ldots + M_{2k}. \qquad (2)$$

Аналогично предыдущему случаю, легко показать, что в левой части неравенства присутствует не меньше $d$ купюр из наибольших $2d$ купюр $M_1, \ldots, M_{2d}$, откуда сразу следует требуемое.

11.5. При каких натуральных $n$ найдутся такие целые $a$, $b$, $c$, что их сумма равна нулю, а число $a^n + b^n + c^n$ — простое?

(*В. Сендеров*)

**Ответ.** При всех четных $n$.

**Первое решение.** Если $n$ четно, то $1^n + (-1)^n + 0^n = 2$ — простое число.

Пусть $x$ — целое, а $n$ — нечетное. Представив $x$ в виде $3t$ или $3t \pm 1$ для целого $t$, в любом случае получаем, что $x^n - x$ делится на 3. Кроме того, $x^n - x$ четно. Отсюда вытекает, что $a^n + b^n + c^n = (a^n - a) + (b^n - b) + (c^n - c)$ делится на $2 \cdot 3$, и значит, не является простым.

**Второе решение.** Докажем другим способом, что при нечетном $n$ число $A = a^n + b^n + c^n$ не является простым. Пусть $A$ — простое, тогда $n > 1$ и $a$, $b$, $c$ отличны от 0

Поскольку $b^n + c^n$ делится на $b + c = -a$, число $A$ делится на $a$. Аналогично, $A$ делится на $b$ и на $c$. Отсюда следует, что каждое из чисел $a$, $b$, $c$ равно одному из чисел $\pm 1$, $\pm A$. Так как среди чисел $a$, $b$, $c$ нет двух противоположных (иначе третье было бы нулем), то среди них найдутся два равных числа; пусть они равны $d$, тогда третье число равно $-2d$. Получаем, что $A = 2d^n - 2^n d^n$ — четное число, делящееся на $2^n - 2 > 2$. Противоречие.

11.6. На плоскости отмечено несколько точек, каждая покрашена в синий, желтый или зеленый цвет. На любом отрезке, соединяющем одноцветные точки, нет точек этого же цвета, но есть хотя бы одна другого цвета. Каково максимально возможное число всех точек? (*М. Мурашкин*)

**Ответ.** 6.

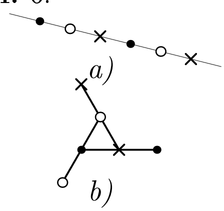


Рис. 11

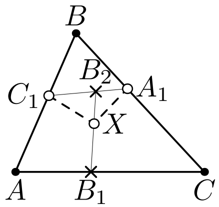


Рис. 12

Два возможных примера из шести точек показаны на рис. 11 (существуют и другие примеры). Предположим, что точек хотя бы 7; тогда найдутся три точки одного цвета. Согласно условию, они не лежат на одной прямой, поэтому они образуют треугольник.

Рассмотрим треугольник $ABC$ наименьшей площади, у которого все три вершины одноцветны (пусть они синие) (см. рис. 12). Тогда внутри него нет синих точек. На каждой из его сторон $BC$, $AC$, $AB$ есть по точке другого цвета (обозначим их $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно). Если все они одноцветны, то образовался одноцветный треугольник меньшей площади, что невозможно. Поэтому можно без ограничения общности считать, что $A_1$ и $C_1$ — желтые, а $B_1$ — зеленая.

Далее, на отрезке $A_1C_1$ есть нежелтая точка $B_2$. По замеченному выше она не может быть синей — значит, она зеленая. Тогда на отрезке $B_1B_2$ есть незеленая точка $X$. Она также не синяя — значит, она желтая. Но тогда треугольник $A_1C_1X$ имеет желтые вершины и площадь, меньшую площади $ABC$ — противоречие.

11.7. Назовем многогранник *хорошим*, если его объем (измеренный в м$^3$) численно равен площади его поверхности (измеренной в м$^2$). Можно ли какой-нибудь хороший тетраэдр разместить внутри какого-нибудь хорошего параллелепипеда? (*М. Мурашкин*)

**Ответ.** Нельзя.

Предположим, что хороший тетраэдр объема $V$ с площадью поверхности $S$ помещен внутри хорошего параллелепипеда объема $V'$, площади граней которого равны $S_1$, $S_2$, $S_3$ ($S_1 \geqslant S_2 \geqslant S_3$), а соответствующие высоты равны $h_1$, $h_2$, $h_3$. По условию $V = S$ и $V' = 2(S_1 + S_2 + S_3)$.

Впишем в тетраэдр сферу $\omega$ радиуса $r$. Так как $V = \frac{1}{3}Sr$, то $r = 3$. Сфера $\omega$ лежит между парой параллельных плоскостей, содержащих грани параллелепипеда, поэтому $h_1 > 2r = 6$. Отсюда $V' = S_1h_1 > 6S_1 \geqslant 2(S_1+S_2+S_3) = V'$. Противоречие.

11.8. Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство

$$(1+x_1)(1+x_1+x_2)\ldots(1+x_1+x_2+\ldots+x_n) \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(n+1)^{n+1}}\sqrt{x_1x_2\ldots x_n}\,.$$

(*М. Мурашкин*)

*Решение.* **Первое решение.** Возведя в квадрат, перепишем неравенство в виде

$$S=\frac{x_1x_2\ldots x_n}{(1+x_1)^2\ldots(1+x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}\leqslant\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Обозначим

$$y_1=\frac{x_1}{1+x_1}\,,\quad y_2=\frac{x_2}{(1+x_1)(1+x_1+x_2)}\,,$$
$$y_3=\frac{x_3}{(1+x_1+x_2)(1+x_1+x_2+x_3)}\,,$$
$$\vdots$$
$$y_n=\frac{x_n}{(1+x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})(1+x_1+x_2+\ldots+x_n)}\,,$$
$$y_{n+1}=\frac{1}{1+x_1+x_2+\ldots+x_n}\,.$$

Тогда мы имеем $y_1y_2\ldots y_{n+1}=S$ и

$$y_1+y_2+\ldots+y_{n+1}=y_1+y_2+\ldots+\left(y_n+\frac{1}{1+x_1+x_2+\ldots+x_n}\right)=$$
$$=y_1+y_2+\ldots+\left(y_{n-1}+\frac{1}{1+x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}\right)=$$
$$=\ldots=\frac{x_1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_1}=1.$$

По неравенству о средних получаем

$$S=y_1y_2\ldots y_{n+1}\leqslant\left(\frac{y_1+y_2+\ldots+y_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

что и требуется.

**Второе решение.** Применим индукцию по $n$. При $n=$ $=1$ неравенство имеет вид $1+x_1\geqslant\sqrt{4x_1} \iff (1-\sqrt{x_1})^2\geqslant$ $\geqslant 0$.

Предположив, что неравенство верно для $n$ переменных, докажем его для $n+1$ переменных. По предположению индукции для $n$ чисел $\frac{x_2}{1+x_1}, \frac{x_3}{1+x_1}, \ldots \frac{x_{n+1}}{1+x_1}$ верно неравенство

$$\left(1+\frac{x_2}{1+x_1}\right)\ldots\left(1+\frac{x_2}{1+x_1}+\frac{x_3}{1+x_1}+\ldots+\frac{x_{n+1}}{1+x_1}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(n+1)^{n+1}}\sqrt{\frac{x_2x_3\ldots x_{n+1}}{(1+x_1)^n}}\,.$$

Домножив на $(1+x_1)^{n+1}$, получаем

$$(1+x_1)(1+x_1+x_2)\ldots(1+x_1+x_2+\ldots+x_{n+1}) \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(n+1)^{n+1}}\sqrt{(1+x_1)^{n+2}x_2x_3\ldots x_{n+1}}\,.$$

Для доказательства перехода индукции остается показать, что $(n+1)^{n+1}(1+x)^{n+2} \geqslant (n+2)^{n+2}x$ для любого положительного $x = x_1$. По неравенству о средних

$$1+x = \underbrace{\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+1}}_{n+1 \text{ слагаемое}} + x \geq (n+2)\sqrt[n+2]{\frac{x}{(n+1)^{n+1}}}\,.$$

Возводя в $(n+2)$-ю степень, получаем требуемое.

---

Комплектация задач полная!